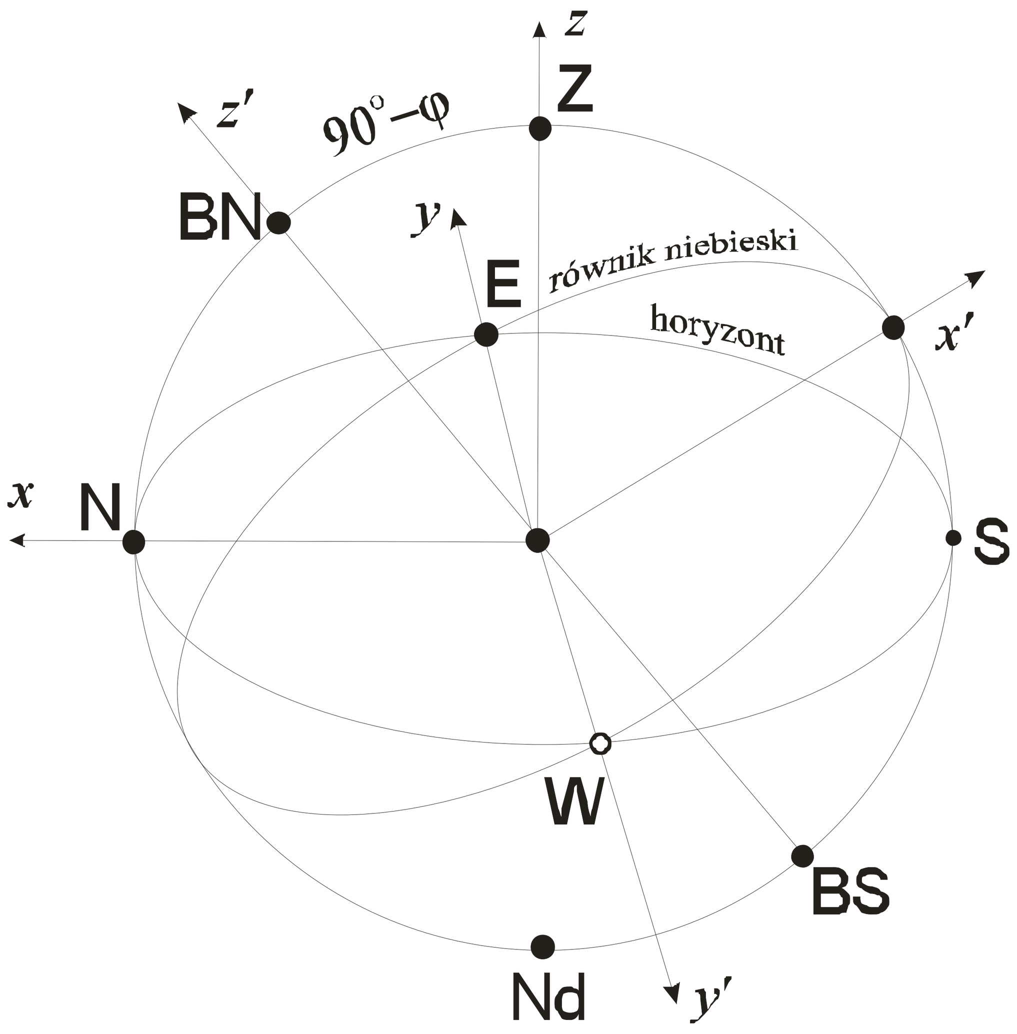
Plansza nr 4

Transformacje współrzędnych pomiędzy układami: horyzontalnym i równikowym godzinnym

Chcąc znaleźć związki pomiędzy współrzędnymi w układach horyzontalnym i równikowym godzinnym, zaczepionych w tym samym punkcie, zauważmy z pomocą rysunku, że dla otrzymania układu godzinnego należy układ horyzontalny obrócić najpierw wokół osi y o kąt $(90°–\varphi)$ (obrót dodatni), a potem o kąt $–180°$ wokół osi z. Układ horyzontalny otrzymamy obracając układ godzinny kolejno o kąt $90°-\varphi$ wokół osi y i o kąt $180°$ wokół osi z.

Na rysunku osie xyz odnoszą się do układu horyzontalnego (H), a osie $x'y'z'$ do układu równikowego godzinnego (G). Kąt φ oznacza szerokość geograficzną wspólnego dla obu układów początku. Zaznaczono też charakterystyczne punkty sfery niebieskiej: bieguny świata (BN i BS), kardynalne punkty horyzontu (N, E, S, W) oraz zenit (Z) i nadir (Nd).



Relacje transformacyjne dla współrzędnych x,y,z obiektu na sferze niebieskiej wyglądają tak samo jak dla jego cosinusów kierunkowych X,Y,Z. Można się o tym łatwo przekonać chociażby używając definicji cosinusów kierunkowych i ogólnej formuły na transformację współrzędnych przy obrocie układu o kąt α wokół osi z: (patrz plansza 3)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = Z_\alpha \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Z_\alpha \cdot r \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

skąd po podzieleniu przez r otrzymujemy:

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = Z_\alpha \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

Dla przejść (w obie strony) między układami horyzontalnym (H) i równikowym godzinnym (G), zaczepionymi w tym samym punkcie, otrzymamy, dla danej szerokości geograficznej φ tego punktu:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_G = Z_{-180} Y_{90-\varphi} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_H \qquad \text{oraz} \qquad \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_H = Z_{180} Y_{90-\varphi} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_G$$

Przywołując wzory na cosinusy kierunkowe w układzie godzinnym i horyzontalnym możemy powyższe równania zapisać w sposób jawny:

$$\begin{pmatrix} cos\delta cost \\ cos\delta sint \\ sin\delta \end{pmatrix} = Z_{-180} \begin{pmatrix} \cos(90-\varphi) & 0 & -\sin(90-\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(90-\varphi) & 0 & \cos(90-\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} coshcosa \\ coshsina \\ sinh \end{pmatrix} \qquad \text{gdzie} \qquad Z_{-180} = Z_{180} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

oraz

$$\begin{pmatrix} coshcosa \\ coshsina \\ sinh \end{pmatrix} = Z_{180} \begin{pmatrix} \cos(90-\varphi) & 0 & -\sin(90-\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(90-\varphi) & 0 & \cos(90-\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos\delta cost \\ cos\delta sint \\ sin\delta \end{pmatrix}$$

Po wymnożeniu macierzy otrzymamy układ równań transformacyjnych:

$$\begin{cases} cos\delta cost = sinhcos\varphi - coshsin\varphi cosa \\ cos\delta sint = -coshsina \\ sin\delta = sinhsin\varphi + coshcos\varphi cosa \end{cases} \qquad \text{oraz} \qquad \begin{cases} coshcosa = sin\delta cos\varphi - cos\delta sin\varphi cost \\ coshsina = -cos\delta sint \\ sinh = sin\delta sin\varphi + cos\delta cos\varphi cost \end{cases}$$

Kąty znajdujące się po prawych stronach powyższych wzorów transformacyjnych traktujemy jako dane, a występujące po lewych stronach jako szukane. W obu przypadkach mamy więc do rozwiązania układ trzech niezależnych równań na dwie niewiadome. Układy równań tego rodzaju (a przy przejściach między układami współrzędnych stosowanych w astronomii zwykle mamy do czynienia właśnie z takimi) rozwiązuje się wygodnie w sposób zilustrowany na poniższym przykładzie.

Przykład: Współrzędne horyzontalne obiektu wynoszą $a = 60°$, $h = 45°$. Ile wynoszą dla szerokości geograficznej $\varphi = 60°$ współrzędne godzinne t, δ tego obiektu, jeśli układ godzinny jest zaczepiony w tym samym punkcie co układ horyzontalny?

Rozwiązanie:
$\cos\delta\cos t = \sin45°\cos60° – \cos45°\sin60°\cos60° = 0.047367173$ **(>0)**
$\cos\delta\sin t = –\cos45°\sin60° = – 0.612372435$ **(< 0)**
$\sin\delta = \sin45°\sin60° + \cos45°\cos60°\cos60° = 0.789149131$
Kąt t zawiera się w przedziale $[0^h, 24^h]$ czemu odpowiada $[0°, 360°]$, zatem może przyjmować wartości w dowolnej spośród czterech ćwiartek tego przedziału. Kąt δ zawiera się w przedziale $[–90°, 90°]$. Oznacza to, że $\cos\delta$ jest zawsze dodatni. Aby ustalić, w której ćwiartce znajduje się szukany kąt t, zauważamy, że w naszym przypadku $\sin t < 0$ i $\cos t > 0$ (znaki $\sin t$ i $\cos t$ są takie same jak znaki prawych stron odpowiednio wzorów drugiego i pierwszego, gdyż $\cos\delta$, będąc zawsze dodatni, nie ma wpływu na znak lewej strony równania). Wynika stąd, że kąt godzinny t, którego szukamy, będzie się zawierał w ćwiartce czwartej, bo w tej właśnie ćwiartce funkcja sinus przyjmuje wartości ujemne, podczas gdy funkcja cosinus — wartości dodatnie. Dzieląc stronami równanie drugie przez pierwsze otrzymamy:

$$\mathrm{tg}\, t = –12.928203315, \quad \text{skąd} \quad t = – 85°.796963077$$

Aby otrzymać szukaną wartość kąta godzinnego, do otrzymanej wartości należy dodać całkowitą wielokrotność okresu funkcji tangens, tak aby otrzymać kąt w drugiej ćwiartce. Tak więc szukany kąt godzinny wynosi $t = – 85°.796963077 + 2 \cdot 180° = 274°.203036923 =$ **$18^h17^m41^s.53$**
Kąt δ otrzymamy wprost jako $\delta = \arcsin(0.789149131) = 52°.106067417 =$ **$52°06'21''.843$**

Trzecie równania w wyprowadzonych wcześniej układach równań transformacyjnych między układami horyzontalnym i równikowym godzinnym mogą służyć do wyznaczania azymutu oraz kąta godzinnego gwiazd (także planet, Słońca, Księżyca i in.) w czasie ich wschodu i zachodu dla ustalonej szerokości geograficznej. Można te trzecie równania przekształcić do postaci:

$$\cos a = (\sin\delta – \sin h\sin\varphi)/\cos h\cos\varphi \qquad \text{oraz} \qquad \cos t = (\sin h – \sin\delta\sin\varphi)/\cos\delta\cos\varphi$$

Gdyby zaniedbać zjawisko refrakcji oraz rozmiary kątowe obiektów moglibyśmy wstawić wartość zero za h dla obiektów przecinających horyzont astronomiczny (podczas wschodu czy zachodu). Wtedy powyższe formuły na azymut i kąt godzinny wschodu/zachodu obiektu przybrałyby jeszcze prostszą postać:

$$\cos a = \sin\delta/\cos\varphi \qquad \text{oraz} \qquad \cos t = – \mathrm{tg}\delta\, \mathrm{tg}\varphi$$

Przykład: Jaki jest przybliżony azymut i kąt godzinny Słońca w dniu przesilenia letniego w miejscowości o szerokości geograficznej 45 stopni. Jak długo trwa tam w tym dniu dzień?
Rozwiązanie: Wykorzystamy tu wzory uproszczone na azymuty i kąty godzinne. Podczas przesilenia letniego deklinacja Słońca wynosi ε, t.j. ok. 23°.26'. Zatem: $\sin\delta = 0.39768175$, a $\mathrm{tg}\delta = 0.43342954$. Z kolei $\cos\varphi = 0.70710678$, a $\mathrm{tg}\varphi = 1$. Wobec tego $\cos a = 0.5624069$, a $\cos t = - 0.43342954$. Stąd $a = 55°.77758 = 55°46'39''$. Rozpoznajemy, że jest to azymut a_w wschodzącego Słońca. Azymut zachodu Słońca otrzymamy poprzez odjęcie tej wartości od 360 stopni. Będzie zatem $a_z = 304°13'21''$.
Podobnie, $t = 115.6854051$ stopni $= 7^h42^m44^s$. Rozpoznajemy, że jest to kąt godzinny zachodu t_z . Kąt godzinny wschodzącego Słońca otrzymamy odejmując tę wartość od 24^h.
Będzie zatem: $t_w = 16^h17^m16^s$. Przybliżona długość dnia wynosiła $\Delta t = 2 \cdot t_z = 15^h25^m28^s$.
Odpowiedź: $a_w = 55°46'39''$, $a_z = 304°13'21''$, $t_w = 16^h17^m16^s$, $t_z = 7^h42^m44^s$, $\Delta t = 15^h25^m28^s$.

Autor planszy: dr Bogdan Wszołek. Copy right: Stowarzyszenie Astronomia Nova. Wersja elektroniczna planszy w formacie PDF jest darmo dostępna na stronie astronomianova.org/publikacje. Projekt współfinansowany ze środków Województwa Małopolskiego w ramach drugiej edycji konkursu **"Małopolska! Postaw na edukację !"**, ogłoszonego przez Urząd Marszałkowski Województwa Małopolskiego.