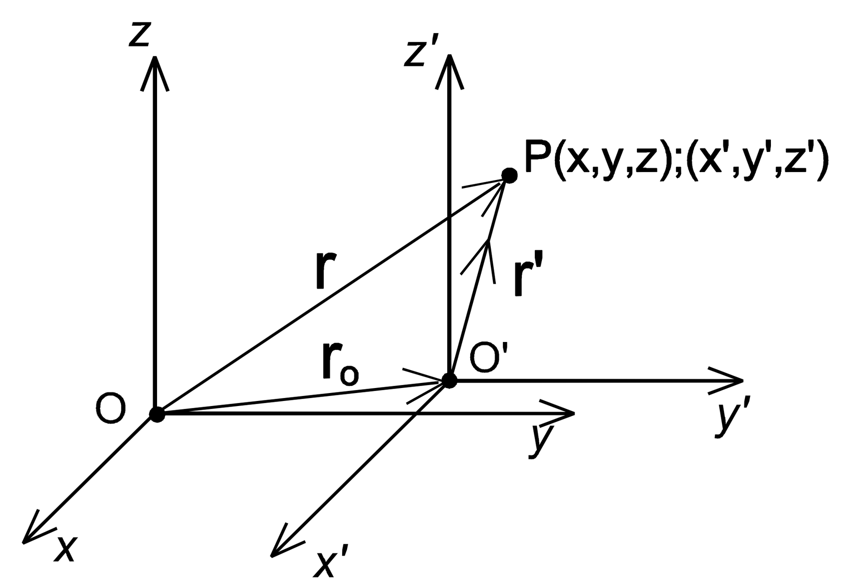
Plansza nr 3

Transformacje współrzędnych astronomicznych

Umiejętność wyliczenia współrzędnych astronomicznych ciała niebieskiego w danym układzie w oparciu o znajomość współrzędnych tego ciała w innym układzie ma znaczenie fundamentalne. Astronomowie używają różnych układów współrzędnych, w zależności od rodzaju podejmowanego problemu. Do opisu położeń planet najwygodniejszy jest układ ekliptyczny, z długością i szerokością ekliptyczną jako współrzędnymi. Mapy i katalogi nieba sporządza się we współrzędnych równikowych równonocnych (patrz plansza nr 2), a wyniki obserwacji, w zależności od rodzaju montażu teleskopu, zapisuje się we współrzędnych horyzontalnych lub równikowych godzinnych.

Dwa układy współrzędnych mogą różnić się między sobą: 1) tylko punktem zaczepienia, z zachowaniem rodzaju układu (np. dwa układy współrzędnych horyzontalnych lecz zaczepione w dwóch różnych miejscach), 2) rodzajem, przy zachowaniu punktu zaczepienia i skrętności (np. układ współrzędnych horyzontalnych i równikowych godzinnych, zaczepione w tym samym punkcie), 3) rodzajem, przy zachowaniu punktu zaczepienia i bez zachowania skrętności (np. układ współrzędnych równikowych godzinnych i układ współrzędnych równikowych równonocnych, zaczepione w tym samym punkcie), 4) zarówno rodzajem jak i punktem zaczepienia.

Dowolne przejście od układu do układu, w najogólniejszym przypadku, daje się złożyć z jednej translacji (czyli przesunięcia), trzech obrotów, wokół różnych osi układu oraz z jednej operacji symetrycznego odbicia względem płaszczyzny wyznaczonej przez dwie osie układu. Należy tylko znać wektor translacji oraz kąty obrotu wokół poszczególnych osi. Rozważmy najpierw czystą (bez obrotów) translację układu *xyz* o wektor r_0 (rysunek poniżej).



Współrzędne x', y', z' dowolnego punktu P o współrzędnych x, y, z otrzymamy ze wzorów:

$$x' = x - x_0 \,,\; y' = y - y_0 \,,\; z' = z - z_0$$

co można zapisać wektorowo jako: $\mathbf{r'} = \mathbf{r} - \mathbf{r_0}$, lub macierzowo:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}$$

Przykład: W odległości $r = 3$ km od obserwatora znajduje się balon meteorologiczny. Pomierzone przez obserwatora azymut i wysokość balonu wynoszą: $a = 150°$, $h = 30°$.
Jakie współrzędne a' i h' miałby ten balon obserwowany z samolotu znajdującego się w zenicie obserwatora na wysokości 1000 m?
Rozwiązanie: Współrzędne balonu w układzie obserwatora wyrażą się wzorami:

$$x = r\cos h\cos a, \quad y = r\cos h\sin a, \quad z = r\sin h$$

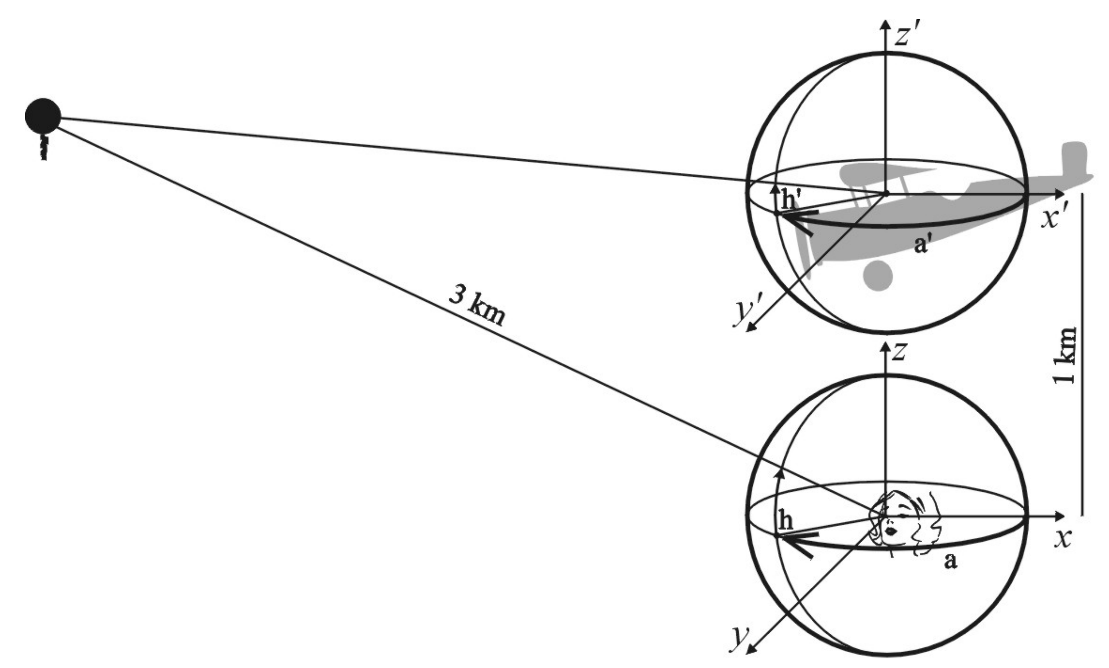
a w układzie związanym z samolotem: $x' = r'\cos h'\cos a', \quad y' = r'\cos h'\sin a', \quad z' = r'\sin h'$
Wektor $\mathbf{r_0}$ przesunięcia układu jest równy: $\mathbf{r_0} = (0,0,1)$ [km]. Możemy zapisać:

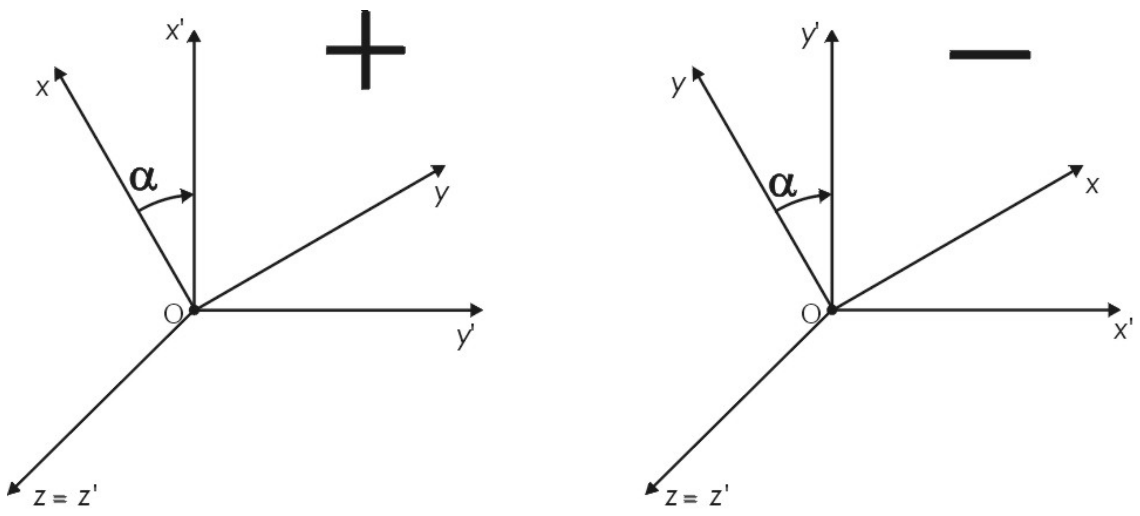
$$(x',y',z') = (x,y,z) - (0,0,1)$$

Po uwzględnieniu wcześniej napisanych wzorów na współrzędne (x,y,z) i po podstawieniu danych wartości liczbowych na r, a, h otrzymamy:

$$(r'\cos h'\cos a',\; r'\cos h'\sin a',\; r'\sin h') = (-2.25,\; 1.2990381,\; 0.5),$$

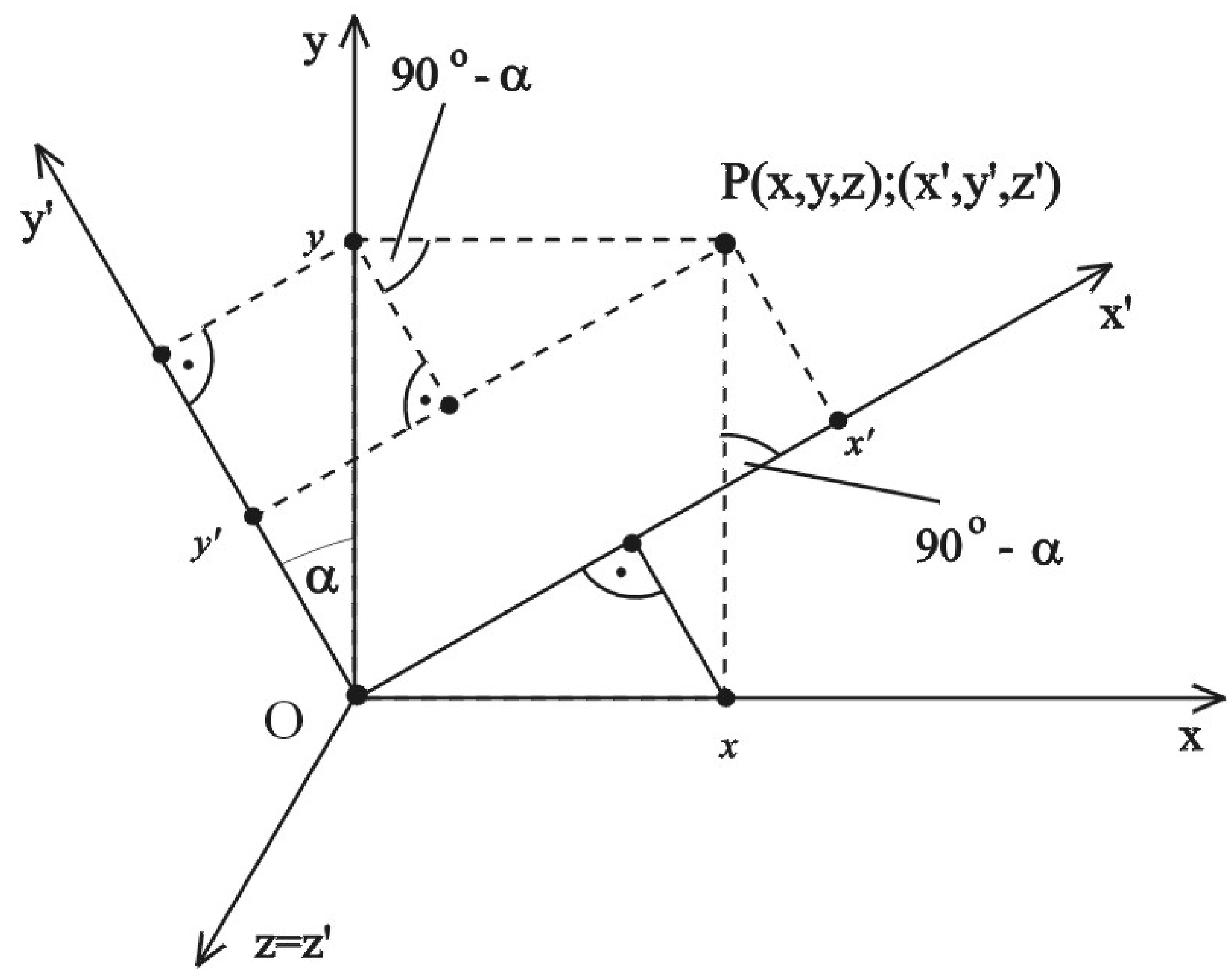
czyli: $x' = -2.25$, $y' = 1.2990381$, $z' = 0.5$.
Zauważamy również, że $\cos a'$ jest ujemny, a $\sin a'$ jest dodatni (człon $r'\cos h'$ jest bowiem zawsze dodatni).
Stąd: $\mathrm{tg}\, a' = y'/x' = -0.5773502666667$, więc $\mathbf{a' = -30° + 180° =} \underline{\mathbf{150°}}$ (bo a' należy do II ćwiartki gdyż tam: $\cos a' < 0$, $\sin a' > 0$).
Kąt h' wyliczymy ze wzoru: $\sin h' = z'/r'$. Skoro zaś $z' = 0.5$, a $r' = (x'^2+y'^2+z'^2)^{1/2} = 0.3779644734$
Będzie więc: $\sin h' = 0.188982237$, skąd $\mathbf{h'} = \underline{\mathbf{10°53'.6}}$. **Odpowiedź: h'=10°53'.6 , a'=150°**





Rozważmy teraz czysty obrót układu współrzędnych wokół osi z o kąt α. Zauważmy, że obrotu takiego można dokonać w lewo lub prawo. Odróżnia się obroty dodatnie wokół zadanej osi takie, że pozostałe osie poruszają się z zachowaniem porządku alfabetyczno-cyklicznego *xyzxy*, od ujemnych, kiedy ten porządek jest złamany. W przypadku gdy dokonujemy obrotu wokół osi z w taką stronę, że x podąża za y (rysunek obok), mamy do czynienia z obrotem dodatnim. Gdyby przy obrocie wokół osi z oś y podążała za osią x, to, niezależnie od skrętności układu, mielibyśmy obrót ujemny. Rysunki obok obrazują obrót dodatni i obrót ujemny.

Posiłkując się poniższym rysunkiem, obrazującym obrót dodatni układu o kąt α wokół osi z, możemy się przekonać, że współrzędne punktu P w nowym układzie współrzędnych wyrażą się poprzez współrzędne w układzie wyjściowym w sposób następujący:



$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y' &= -x\sin\alpha + y\cos\alpha \\ z' &= z \end{aligned}$$

Lub w zapisie macierzowym:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Z_\alpha \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

gdzie Z_α oznacza macierz obrotu układu wokół osi z o kąt α..

Gdybyśmy mieli obrót ujemny, wtedy wszędzie w miejsce α w powyższych wzorach powinniśmy wstawić wartość $-\alpha$.

Rozważając dodatnie obroty wokół osi x i y, w podobny sposób otrzymalibyśmy wyrażenia na odpowiednie macierze obrotu X_α i Y_α:

$$X_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad Y_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Wstawka: mnożenie macierzy przez wektor.

Macierze to obiekty matematyczne przyjmujące charakter tablicy liczb. Tablica składa się z określonej ilości wierszy i kolumn. Macierz o jednym wierszu i jednej kolumnie jest zwykłą liczbą. Macierz o jednej kolumnie i trzech wierszach jest wektorem w przestrzeni 3-wymiarowej. Dla macierzy, podobnie jak dla liczb, zostały określone działania. W szczególności macierze można przez siebie mnożyć. Posłużmy się dla ilustracji prostym przykładem mnożenia macierzy o trzech wierszach i trzech kolumnach przez macierz (wektor) o trzech wierszach i jednej kolumnie. Zróbmy to dla powyższego zapisu macierzowego na współrzędne x', y', z'. Przy mnożeniu stosuje się zasadę "wiersz przez kolumnę". Będzie zatem:

$x' = \cos\alpha \cdot x + \sin\alpha \cdot y + 0 \cdot z = x\cdot\cos\alpha + y\cdot\sin\alpha$ $\qquad$ $y' = -\sin\alpha \cdot x + \cos\alpha \cdot y + 0 \cdot z = -x\cdot\sin\alpha + y\cdot\cos\alpha$ $\qquad$ $z' = 0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z = z$

Wynikiem tego mnożenia jest wektor o współrzędnych x', y', z' .