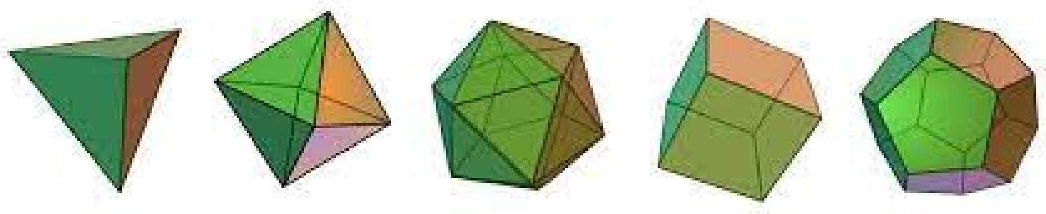
Plansza nr 11

Kosmiczne właściwości stożka

Już w czasach starożytnych filozofowie popadli w obsesję wiązania geometrii, a w szczególności wybranych figur geometrycznych, ze sprawami dotyczącymi nieba. Boga – Stwórcę Wszechświata zaczęto traktować jak wielkiego geometrę, architekta, który przy stwarzaniu świata korzystał z matematyki, geometrii. Idąc jeszcze dalej, zaczęto matematykę uważać za Boską, a nawet próbowano ją wręcz utożsamiać z Bogiem. Słowem, człowiek wcześnie poczuł wielkie znaczenie matematyki i był w stanie pokochać ją do najwyższych granic swoich możliwości.

Niektórym figurom geometrycznym przypisywano znaczenie szczególne. Miały się one Bogu podobać najbardziej, bo wyróżniały się pośród innych figur czymś wyjątkowym. Za najdoskonalsze figury uznano koło i kulę. I nawet jeśli zda się nam współczesnym, że to było przesadne traktowanie tych figur, to rozejrzyjmy się wokół siebie i chciejmy zauważyć, jaką karierę zrobiły koło i kula w rozwoju cywilizacji. Ale i trójkąt jest ciekawy. Trójkąt prostokątny, trójkąt równoboczny. W Egipcie podniesiony do rangi niemalże boskości. Trójkąt egipski, prostokątny o bokach 3, 4 i 5 (o obwodzie 12). Trójkąt budzący zachwyt u Pitagorasa; $a^2 + b^2 = c^2$. Dalej, figury platońskie, których w żaden sposób nie idzie wymyślić więcej niż dokładnie pięć! Czworościan, sześcian, ośmiościan, dwunastościan i dwudziestościan – oczywiście foremne. Figury wyróżniające liczby 3, 4 i 5 – jak trójkąt egipski, bo zbudowane tylko z trójkątów, kwadratów i pięciokątów.

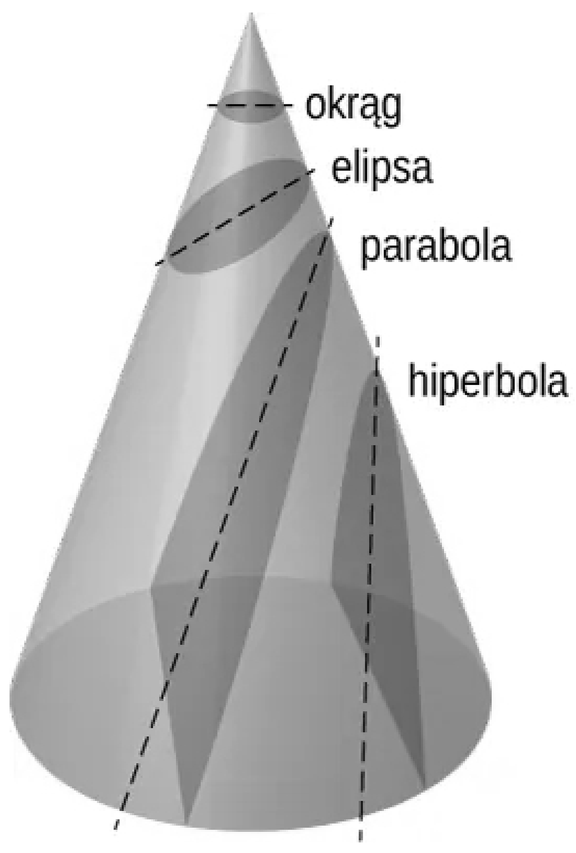


Z obsesją, graniczącą z mistycyzmem, młody Johannes Kepler postrzegał te figury, jako osnowę na której Stwórca zbudował Wszechświat. I dzisiaj obserwuje się wśród ludzi, że traktują niektóre liczby i niektóre figury z jakąś wyjątkową czcią. Mają do tego prawo, choć nie musimy tego rozumieć.

Kosmos ma swoje wyróżnione kształty, ale nie takie, jak sobie wyobrażali starożytni – choć to właśnie oni je zauważyli i opisali. Dopiero genialny Kepler odnalazł te kształty w Kosmosie.

Apoloniusz z Pergi (rycina po prawej) – starogrecki matematyk i astronom, znany z badań nad geometrią krzywych płaskich. Studiował matematykę w Szkole Aleksandryjskiej u uczniów Euklidesa. Najbardziej aktywny naukowo był około 210 r. p.n.e. Działał na terenie Aleksandrii i Pergamonu. Trzeci z wpływowych matematyków starożytnej Grecji, po Euklidesie i Archimedesie. W starożytności nazywano go „Wielkim Geometrą". Apoloniusz interesował się głównie geometrią, a zwłaszcza krzywymi stożkowymi. Napisał traktat *Stożkowe*, w którym opisał elipsę, parabolę i hiperbolę oraz nadał im nazwy. W dziele tym naukę o krzywych stożkowych doprowadził prawie do poziomu nowożytnego. Stworzył podwaliny geometrii analitycznej. W astronomii Apoloniusz zajmował się badaniem ruchu Księżyca i teorią epicykli.

Johannes Kepler (rycina po lewej). Dowiódł, że planety w Układzie Słonecznym poruszają się po orbitach eliptycznych.



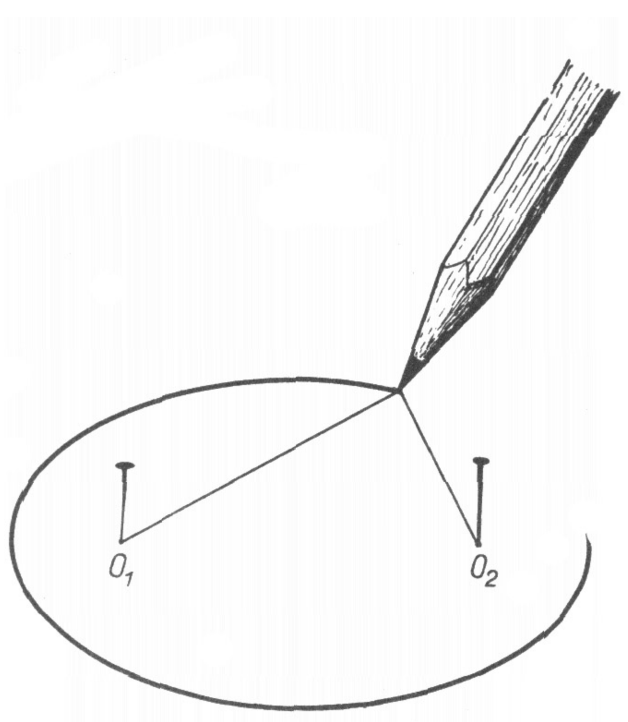
Jak zauważył Apoloniusz, pobocznica stożka cięta płaszczyzną ustawianą pod różnymi kątami do płaszczyzny podstawy stożka, odkłada się na płaszczyznach tnących różnymi figurami płaskimi. Okrąg, dla płaszczyzny tnącej równoległej do podstawy stożka; elipsa, dla kątów nachylenia płaszczyzny z przedziału otwartego (0°, α), gdzie α jest kątem zawartym między tworzącą i podstawą stożka; parabola, dla płaszczyzny tnącej pochylonej dokładnie pod kątem α; oraz hiperbola, dla pochyleń większych od α. Przy płaszczyźnie stykającej się ze stożkiem, możemy jeszcze na styku uzyskać punkt albo prostą.

Cięcia stożka dopuszczają, jak byśmy powiedzieli dzisiaj, spoczynek ciała (punkt), jego ruch po linii prostej, ruch po okręgu, ruch po elipsie, ruch po paraboli i ruch wzdłuż hiperboli. Spośród tych możliwości, tylko ruchy po elipsie, paraboli i hiperboli realizują się w Kosmosie, podczas gdy spoczynek, ruch prostoliniowy i po okręgu są idealizacjami, nie znajdującymi realizacji w przyrodzie. [W rzeczy samej, orbity ciał niebieskich nigdy nie mają kształtów idealnych elips, parabol czy hiperbol; jednak te właśnie krzywe, bardziej niż okrąg, nadają się do opisu orbit].

Dzisiaj wiemy, że planety poruszają się wokół Słońca po orbitach eliptycznych, statki i sondy kosmiczne poruszają się wokół Ziemi po orbitach eliptycznych, są ciała niebieskie (np. komety), które mają orbity paraboliczne lub hiperboliczne.

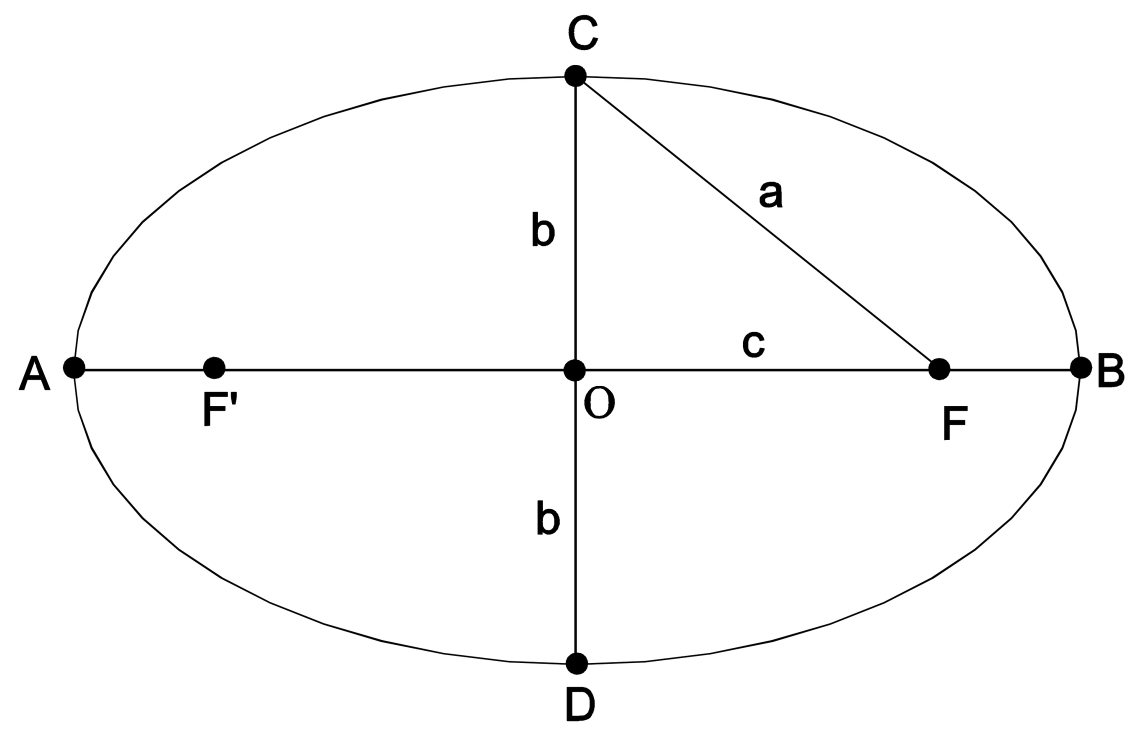
Warto zwrócić uwagę, że kształt sferyczny (które można otrzymać przez odpowiedni obrót okręgu), elipsoidalny, paraboloidalny i hiperboloidalny znalazły szerokie zastosowanie w optyce, zwłaszcza jeśli chodzi o budowę teleskopów astronomicznych. Czasze anten montowanych na sondach i statkach kosmicznych, a także w obsługujących ich loty stacjach naziemnych, są zwyczajowo budowane w kształcie paraboloid. Zwierciadła optyczne czy radiowe, wykonane w kształcie paraboloidy, są wolne od wad optycznych (np. od tzw. aberracji sferycznej), które są zmorą zwierciadeł sferycznych. Mamy tu znowu wskazanie, że kształt paraboli lepiej "harmonizuje" z przyrodą niż kształt okręgu.

W dalszej części przyjrzymy się bliżej elipsie, z której kształtem i własnościami musi być dobrze obznajomiony każdy, kto uczestniczy w planowaniu czy realizacji misji kosmicznych.



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$e = \frac{c}{a} \qquad s = \frac{a-b}{a}$$



Elipsę można łatwo narysować, posiłkując się kawałkiem nitki i dwoma szpilkami, jak zademonstrowano na lewym rysunku. Wbijamy szpilki w dowolnej od siebie odległości i wiążemy końce nitki do szpilek. Naciągamy ołówkiem nitkę i poruszamy ołówkiem (nie zwalniając naciągu). Otrzymamy w ten sposób elipsę. Gdybyśmy oba końce nitki zaczepili do jednej szpilki, to otrzymalibyśmy okrąg. Bo okrąg jest przypadkiem szczególnym elipsy, gdy jej osie a i b są sobie równe. Jeśli zmienimy odległość szpilek, albo długość nitki, zmieni się kształt elipsy na bardziej lub mniej spłaszczony. Jeśli środek elipsy położymy w środku kartezjańskiego układu współrzędnych XY, oś a elipsy skierujemy wzdłuż osi X, a oś b wzdłuż Y, to równanie elipsy możemy wyrazić w sposób geometryczno-analityczny. Wtedy elipsa jest zbiorem wszystkich punktów (x,y) na płaszczyźnie XY, dla których jest spełniony warunek wyrażony ścisłym wzorem, zamieszczonym powyżej i przedstawiającym równanie elipsy.

Rozmiary i kształt elipsy określone są (prawy rysunek) przez jej osie $AB = 2a$ i $CD = 2b$, gdzie a i b oznaczają długości półosi elipsy. Ogniska F i F' odgrywają dla elipsy taką rolę, jak dla okręgu jego środek. Odległość $OF = OF'$, oznaczana literą c, po podzieleniu przez a daje wartość ***mimośrodu*** **(*e*)**, będącego parametrem liczbowym określającym kształt elipsy. Do określenia kształtu używa się też ***spłaszczenia*** **(*s*)**, zdefiniowanego powyżej. Podanie a i e lub a i s w sposób jednoznaczny określa elipsę, rozmiar i spłaszczenie elipsy. Dla elipsy słuszne są, oprócz powyższych, następujące związki pomiędzy wielkościami ją opisującymi:

$$c^2 = a^2 - b^2, \qquad \frac{b}{a} = 1 - s, \qquad b = a(1-s) = a\sqrt{1-e^2}, \qquad e = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}} = \sqrt{2s - s^2}$$

Matematyka, w tym i geometria, jest bodajże najwspanialszym wytworem ludzkiego intelektu. Na pewnym etapie rozwoju cywilizacyjnego zaistniała konieczność stworzenia matematyki, pod rygorem pozostania ludzkości na zwierzęcym poziomie rozwoju. Nie mamy żadnych podstaw stawiać matematyki na równi z Bogiem, ani "rozkazywać" Stwórcy, by posługiwał się narzędziami stworzonymi przez człowieka. Nie możemy też mieć pretensji do Wszechświata, że nie zawsze poddaje się próbom matematycznego opisu. Jednak mamy prawo, jako ludzie, być dumni z tego, że potrafiliśmy stworzyć matematykę, która pozwoliła dorosnąć ludzkości do dzisiejszego poziomu oraz mamy prawo oczekiwać, że dzięki niej zrozumiemy Wszechświat, a może nawet odciśniemy na nim swoje piętno! Żeby jednak tak się stało, trzeba nam żyć w przyjaźni do matematyki i w klimacie tej przyjaźni budować w sobie **kosmicznego ducha**.

Autor planszy: dr Bogdan Wszołek. Copy right: Stowarzyszenie Astronomia Nova. Wersja elektroniczna planszy w formacie PDF jest darmo dostępna na stronie astronomianova.org/publikacje. Projekt współfinansowany ze środków Województwa Małopolskiego w ramach drugiej edycji konkursu **"Małopolska! Postaw na edukację !"**, ogłoszonego przez Urząd Marszałkowski Województwa Małopolskiego.

MAŁOPOLSKA